

Géométrie artiniennne de l' ∞ -champs des éléments de Maurer-Cartan

Brahim Benzeghli*

2 octobre 2012

Résumé : Dans cet article, en se basant sur les mêmes techniques que dans [BENZ08] pour la construction de la carte formellement lisse $V \rightarrow Perf$ entre la variété des complexes et le ∞ -champs d'Artin $Perf$, on construira explicitement un nouveau ∞ -champs d'Artin des éléments de Maurer-Cartan d'une dg-catégorie \mathcal{P} , qu'on note par $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$, avec une carte $V \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ qu'on montrera formellement lisse.

Abstract : In this paper, based on the same techniques as in [BENZ08] for the construction of a formally smooth map $V \rightarrow Perf$ from the variety of complexes to the Artin ∞ -stack $Perf$, we explicitly construct a new Artin ∞ -stack of Maurer-Cartan elements of a dg-category \mathcal{P} denoted by $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$, with a map $V \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ which we show to be formally smooth.

Introduction

Dans [BENZ08] on a construit une carte explicite $V \rightarrow Perf$ pour l' ∞ -champs des complexes parfaits, où V était le schéma de Buchsbaum-Eisenbud [BUCH1], [BUCH2], [BRUN], [HUNE], [KEMP], [MASS], [TRIV] et [YOSH] qui paramétrise les différentiels d avec $d^2 = 0$ sur une suite de fibrés vectoriels triviaux.

Le but principal du [BENZ08] était de montrer la lisseté formelle du morphisme $V \rightarrow Perf$, après avoir explicité l' ∞ -champs d'Artin $Perf$.

On veut généraliser ce résultat pour un autre champs. Pour cela on fixera une dg-catégorie k -linéaire \mathcal{P} qui satisfait aux hypothèses suivants :

- L'ensemble des objets $Ob(\mathcal{P})$ est fini.
- Pour tout $E, F \in Ob(\mathcal{P})$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}^i(E, F)$ est un k -espace vectoriel de dimension fini.
- Il existe un indice $n > 0$ tel que pour tout $i < -n$, le k -espace vectoriel $\mathcal{P}^i(E, F) = 0$.

*Ce papier a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-09-BLAN-0151-02 (HODAG)

On peut définir une $(\infty, 1)$ -catégorie $MC(\mathcal{P})$ dont les objets sont les couples (E, η) où E est un objet de \mathcal{P} et η est un élément de Maurer-Cartan dans $\mathcal{P}^1(E, E)$.

On définit l' ∞ -champs $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ comme le ∞ -champs associé à l' ∞ -préchamps $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{es}$ qui à une k -algèbre B associe l'intérieur de $MC(\mathcal{P} \otimes_k B)$. Cet intérieur peut être vu comme un ensemble simplicial de *Kan* ou une quasi-catégorie $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{es}(B)$.

Pour construire une carte recouvrant l' ∞ -champs $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ on construira un foncteur

$$V_E : AlgCom_k \rightarrow \mathcal{E}ns$$

qui associe à chaque $B \in AlgCom_k$ son image $V_E(B)$ l'ensemble des éléments de Maurer-Cartan dans $\mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B$. Ce foncteur est représentable par un schéma affine. On procède en choisissant des k -bases dans \mathcal{P}^1 et \mathcal{P}^2 données et en suivant les mêmes démarches que dans [BENZ08] ; V_E est le préimage de l'origine d'une application entre espaces affines

$$\begin{array}{ccc} courb : \mathcal{P}_{sch}^1(E, E) & \rightarrow & \mathcal{P}_{sch}^2(E, E) \\ \eta & \mapsto & d(\eta) + \eta\eta. \end{array}$$

La détermination du V_E nous permettra d'avoir une carte

$$V_E \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}.$$

On démontre qu'elle est formellement lisse. Pour ça on montre que pour un anneau commutatif B et si I un idéal de carré nul dans B , alors : pour tout couple de morphismes

$$(F, \zeta_I) \quad : \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_I} \\ \xleftarrow{a_I} \end{array} \quad : \quad (E, \eta_I := \eta \otimes_B B/I)$$

tels que a_I et α_I sont inverses dans $H^0(\mathcal{MC}(\mathcal{P} \otimes_k B/I))$, alors il existe un relèvement ζ pour ζ_I et α pour α_I tel que $d(\zeta) + \zeta^2 = 0$ et $d_{\zeta\eta}(\alpha) = 0$.

L'existence d'une carte permet de déduire que $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est un $(n+1)$ -champs d'Artin.

Des dg-Catégories vers les $(\infty, 1)$ -Catégories

Définition 1 Soit B un anneau commutatif. Une dg-catégorie \mathcal{P} sur B est donnée par :

- i) $ob(\mathcal{P})$ est un ensemble.
- ii) $\forall E, F \in ob(\mathcal{P})$, on a un complexe de B -modules $\mathcal{P}^\bullet(E, F)$ tel que

$$(\mathcal{P}^\bullet(E, F), d) = \{(\mathcal{P}^i(E, F), d^i), \quad d^i : \mathcal{P}^i(E, F) \rightarrow \mathcal{P}^{i+1}(E, F)\}.$$

autrement dit :

$$(\mathcal{P}^\bullet(E, F), d) = \dots \rightarrow \mathcal{P}^{i-1}(E, F) \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{P}^i(E, F) \xrightarrow{d^i} \mathcal{P}^{i+1}(E, F) \rightarrow \dots$$

- iii) $1 \in \mathcal{P}^0(E, F)$ et $d(1) = 0$.

iv) $\forall \alpha \in \mathcal{P}^i(E, F), \forall \beta \in \mathcal{P}^j(F, G)$ alors $\beta.\alpha \in \mathcal{P}^{i+j}(E, G)$ vérifiant :

- L'application $\alpha, \beta \mapsto \beta.\alpha$ est B -bilinéaire.
- $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{P}^i(E, F), \beta \in \mathcal{P}^j(F, G), \gamma \in \mathcal{P}^k(G, H)$.
- $d(\beta\alpha) = d(\beta)\alpha + (-1)^{|\beta|}\beta d(\alpha)$.

Soient $\mathcal{P}^\bullet(X, Y)$, $\mathcal{P}^\bullet(Y, Z)$ et $\mathcal{P}^\bullet(X, Z)$ trois complexes, on définit un morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\bullet(Y, Z) \otimes \mathcal{P}^\bullet(X, Y) &\rightarrow \mathcal{P}^\bullet(X, Z) \\ \sum \beta_i \otimes \alpha_i &\mapsto \sum \beta_i \alpha_i \end{aligned}$$

où le complexe $\mathcal{P}^\bullet(Y, Z) \otimes \mathcal{P}^\bullet(X, Y)$ est défini par :

$$(\mathcal{P}^\bullet(Y, Z) \otimes \mathcal{P}^\bullet(X, Y))^i = \bigoplus_j \mathcal{P}^j(Y, Z) \otimes \mathcal{P}^{i-j}(X, Y), \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

avec les différentielles

$$d(\beta \otimes \alpha) := d(\beta) \otimes \alpha + (-1)^{|\beta|} \beta \otimes d(\alpha)$$

Définition 2 Si \mathcal{P}^\bullet une dg -catégorie, on définit $\mathcal{P}^{(\infty, 1)}$ une catégorie simpliciale telle que :

- $Ob(\mathcal{P}^\bullet) = Ob(\mathcal{P}^{(\infty, 1)})$
- $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{P}^{(\infty, 1)}) :$

$$\mathcal{P}^{(\infty, 1)}(X, Y) := DP(\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(X, Y)) \quad (1)$$

où $DP(\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(X, Y))$ est l'ensemble simplicial de Dold-Puppe [SIMP2] associé au complexe $\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(X, Y)$ qui est la troncation négative du complexe $\mathcal{P}^\bullet(X, Y)$ définie par

$$(\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(X, Y))^i = \begin{cases} \mathcal{P}^\bullet(X, Y)^i & \text{si } i < 0 \\ Z^0 = \text{Ker}(d : \mathcal{P}^\bullet(X, Y)^0 \rightarrow \mathcal{P}^\bullet(X, Y)^1) & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

et on peut l'écrire :

$$\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(X, Y) = (\dots \rightarrow \mathcal{P}^\bullet(X, Y)^{-i} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{P}^\bullet(X, Y)^{-2} \rightarrow \mathcal{P}^\bullet(X, Y)^{-1} \rightarrow Z^0)$$

Les flèches de \mathcal{P}^\bullet se composent avec un produit associatif

$$\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{P}^\bullet) : \quad \mathcal{P}^{(\infty, 1)}(Y, Z) \times \mathcal{P}^{(\infty, 1)}(X, Y) \rightarrow \mathcal{P}^{(\infty, 1)}(X, Z) \quad (2)$$

Dans le papier [HIRS] on a un morphisme

$$DP(\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(Y, Z)) \times DP(\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(X, Y)) \rightarrow DP(\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(Y, Z)) \otimes DP(\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(X, Y)) \quad (3)$$

D'autre part on a un morphisme

$$\tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(Y, Z) \otimes \tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(X, Y) \rightarrow \tau_{\leq 0} \mathcal{P}^\bullet(X, Z) \otimes \mathcal{P}^\bullet(X, Y)$$

et on composant avec (3) on obtient une multiplication comme dans (2)

$$\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{P}) : \quad DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}(Y, Z)) \times DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}(X, Y)) \rightarrow DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}(X, Z)) \quad (4)$$

Ceci est la composition dans $\mathcal{P}^{(\infty, 1)}$.

Définition 3 Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(\infty, 1)}$ une $(\infty, 1)$ -catégorie, on définit $\mathcal{A}^{(\infty, 0)}$ comme la $(\infty, 0)$ -catégorie intérieure à \mathcal{A} .

Si on considère $\mathcal{A}^{(\infty, 0)}(X, Y)$ comme le sous-ensemble simplicial de $\mathcal{A}^{(\infty, 1)}(X, Y)$ en ne prenant que les morphismes inversibles, la sous-catégorie $\mathcal{A}^{(\infty, 0)} \subseteq \mathcal{A}^{(\infty, 1)}$ peut être vue comme une quasi-catégorie ou un foncteur vers un ensemble simplicial de Kan, et on note

$$\mathcal{A}^{es} := \mathcal{A}^{(\infty, 0)}$$

On définit plus précisément le nerf bisimpliciale de cette catégorie par

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}\mathcal{A})_{0, m} &= \text{ob}(\mathcal{A}) \\ (\mathcal{N}\mathcal{A})_{n, m} &= \coprod_{\substack{x_0, \dots, x_n \\ x_i \in \text{ob}(\mathcal{A})}} \mathcal{A}(x_0, x_1)_m \times \dots \times \mathcal{A}(x_{n-1}, x_n)_m. \end{aligned}$$

Un tel objet simplicial correspond à un morphisme

$$\begin{aligned} \Delta^\cdot \times \Delta^\cdot &\rightarrow \mathcal{E}ns \\ (n, m) &\mapsto (\mathcal{N}\mathcal{A})_{n, m} \end{aligned}$$

tel que les $(\mathcal{N}\mathcal{A})_{n, \cdot} \in \mathcal{E}ns^{\Delta^\cdot}$

Les morphismes de Ségal sont des isomorphismes

$$(\mathcal{N}\mathcal{A})_{n, \cdot} \xrightarrow{\cong} (\mathcal{N}\mathcal{A})_{1, \cdot} \times_{(\mathcal{N}\mathcal{A})_{0, \cdot}} \dots \times_{(\mathcal{N}\mathcal{A})_{0, \cdot}} (\mathcal{N}\mathcal{A})_{1, \cdot}$$

Pour une $(\infty, 1)$ -catégorie, on a son intérieur

$$\mathcal{A}^{(\infty, 0)} \subset \mathcal{A}^{(\infty, 1)} \quad \text{et} \quad (\mathcal{A}^{es})_n := (\mathcal{A}^{(\infty, 0)})_{(n, n)}$$

ce sont les éléments de la diagonale.

Éléments de Maurer-Cartan

Définition 4 Un élément de Maurer-Cartan (M-C) pour $E \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ est un élément $\eta \in \mathcal{P}^1(E, E)$ vérifiant l'équation de Courbure suivante

$$\delta(\eta) + \eta \cdot \eta = 0 \quad (5)$$

on définit l'ensemble $\text{Ob}(MC(\mathcal{P}))$ comme l'ensemble des couples (E, η) où $E \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ et η est un élément de Maurer-Cartan. Un tel couple sera appelé MC-objet

Si (E, η) et (F, ζ) sont deux MC -objets, on définit la différentielle

$$d_{\eta, \zeta} : \mathcal{P}^i(E, F) \rightarrow \mathcal{P}^{i+1}(E, F)$$

Par $d_{\eta, \zeta}(a) := da + \zeta.a - (-1)^i a.\eta$

Lemme 1 On a $d_{\eta, \zeta}^2 = 0$ et si on pose

$$MC(\mathcal{P})((E, \eta); (F, \zeta)) := (\mathcal{P}(E, F), d_{\eta, \zeta})$$

avec la même multiplication et identité que \mathcal{P} , on obtient une dg -catégorie $MC(\mathcal{P})$.

Définition 5 On définit la catégorie de Maurer-Cartan de \mathcal{P} par la dg -catégorie $MC(\mathcal{P})$ avec

- $ob(MC(\mathcal{P})) = \{(X, \rho); \quad X \in ob(\mathcal{P}), \quad \rho \in \mathcal{P}^1(X, X) \text{ avec } d(\rho) + \rho^2 = 0\}$
- $MC(\mathcal{P})((X, \rho), (Y, \mu)) := (\mathcal{P}(X, Y); d_{\rho\mu})$ et $d_{\rho\mu}(\cdot) = d(\cdot) + \rho \circ \cdot + \mu \circ \cdot$.

Hypothèses

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nul. On fixera par la suite une dg -catégorie k -linéaire \mathcal{P} qui satisfait aux hypothèses suivant :

1. L'ensemble des objets $Ob(\mathcal{P})$ est fini.
2. Pour tout $E, F \in Ob(\mathcal{P})$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}^i(E, F)$ est un k -espace vectoriel de dimension fini.
3. Il existe un indice $n > 0$ tel que pour tout $i < -n$, le k -espace vectoriel $\mathcal{P}^i(E, F) = 0$.

Remarque 1 Si $\mathcal{P}(E, F)$ est un complexe strictement parfait sur k , alors les hypothèses 2 et 3 sont assurées, et pour l'hypothèse 3 on peut juste dire qu'il existe un n tel que $\mathcal{P}^i(E, F) = 0$, pour $|i| > n$ (c'est-à-dire : $i \notin [-n, n]$).

Le \mathcal{MC} -préchamps

Soit k un corps. On fixe la dg -catégorie k -linéaire \mathcal{P} qui satisfait aux hypothèses ci-dessus.

Pour tout k -algèbre R , on définit une R - dg -catégorie $\mathcal{P} \otimes_k R$ telle que

$$Ob(\mathcal{P} \otimes_k R) = ob(\mathcal{P})$$

et

$$\forall E, F \in ob(\mathcal{P} \otimes_k R) : \quad (\mathcal{P} \otimes_k R)(E, F) := \mathcal{P}(E, F) \otimes_k R$$

On pose

$$\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{dg}(R) := MC(\mathcal{P} \otimes_k R)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{(\infty,1)}(R) &:= [\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{dg}(R)]^{(\infty,1)} \\ \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{es}(R) &:= [\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{(\infty,1)}(R)]^{es}\end{aligned}$$

et on définit $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ comme le ∞ -champs associé à l' ∞ -préchamps $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{es}$.

On note que la condition 3 de l'hypothèse, qui s'applique aussi aux $\mathcal{P} \otimes_k R$, implique que $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{(\infty,1)}$ est en fait un $(n+1, 1)$ -préchamps, donc $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est un $(n+1)$ -champs de $(n+1)$ -groupoides.

Lissité formelle

Soit B un anneau commutatif et I un idéal de B tel que $I^2 = 0$. Supposons que (F, ζ_I) est un objet de la dg-catégorie $MC(\mathcal{P} \otimes_k B/I)$ et (E, η) un objet de la dg-catégorie $MC(\mathcal{P} \otimes_k B)$.

Considérons deux morphismes de MC-objets a_I et α_I comme suivant :

$$(F, \zeta_I) \quad : \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha_I} \\ \xleftarrow{a_I} \end{matrix} \quad : \quad (E, \eta_I := \eta \otimes_B B/I)$$

tels que a_I et α_I sont inverses dans $H^0(MC(\mathcal{P} \otimes_k B/I))$.

On choisit un relèvement (modulo I) :

$$(F, \zeta) \quad : \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{a} \end{matrix} \quad : \quad (E, \eta)$$

tels que $\zeta_I := \zeta \otimes_B B/I$ et où a et α se réduisent à a_I et α_I modulo I et les compositions $\alpha.a$ et $a.\alpha$ sont données par :

$$\alpha.a = 1 + d_{\eta, \eta}(g) + u = 1 + \eta g + g \eta + u; \quad u \in \mathcal{P}^0(E, E).I \quad (6)$$

$$a.\alpha = 1 + d_{\zeta, \zeta}(h) + v = 1 + \zeta h + h \zeta + v; \quad v \in \mathcal{P}^0(F, F).I \quad (7)$$

On note que (F, ζ) sera un objet de la dg-catégorie $MC(\mathcal{P} \otimes B)$, si

$$d(\zeta) + \zeta^2 = 0,$$

mais nous ne pouvons pas savoir cela *a priori*. On cherche donc à modifier ζ .

On pose

$$\theta = \zeta + \varepsilon; \quad \varepsilon^2 = 0 \quad (8)$$

$$d(\zeta) + \zeta^2 = \varphi \in P^2(F, F).I \quad (9)$$

d'après 8 on trouve

$$\begin{aligned}d(\theta) + \theta^2 &= d(\zeta) + \zeta^2 + d(\varepsilon) + \zeta \varepsilon + \varepsilon \zeta \\ &= \varphi + d(\varepsilon) + \zeta \varepsilon + \varepsilon \zeta \\ &= \varphi + d_{\zeta \zeta}(\varepsilon)\end{aligned}$$

On a $d_{\zeta_I \eta_I}(\alpha_I) = 0$, on pose $\gamma =: d(\alpha) + \eta\alpha - \alpha\zeta \in \mathcal{P}^1(F, E).I$, on applique $d_{\zeta_I \eta_I}$ sur γ

$$\begin{aligned}
d_{\zeta_I \eta_I}(\gamma) &= d(\gamma) + \eta\gamma + \gamma\zeta \\
&= d(d(\alpha) + \eta\alpha - \alpha\zeta) + \eta(d(\alpha) + \eta\alpha - \alpha\zeta) + (d(\alpha) + \eta\alpha - \alpha\zeta)\zeta \\
&= d^2(\alpha) + d(\eta\alpha) - d(\alpha\zeta) + \eta d(\alpha) + \eta^2\alpha - \eta\alpha\zeta + d(\alpha)\zeta + \eta\alpha\zeta - \alpha\zeta^2 \\
&= d(\eta)\alpha - \eta d(\alpha) - d(\alpha)\zeta - \alpha d(\zeta) + \eta d(\alpha) + \eta^2\alpha - \eta\alpha\zeta + d(\alpha)\zeta + \eta\alpha\zeta - \alpha\zeta^2 \\
&= (d(\eta) + \eta^2)\alpha - \alpha(d(\zeta) + \zeta^2) \\
&= -\alpha\varphi
\end{aligned}$$

Donc on a

$$d_{\zeta_I \eta_I}(\gamma) = -\alpha_I \varphi \quad (10)$$

on calcule aussi

$$\begin{aligned}
d_{\zeta_I \zeta_I}(a_I \gamma) &= d_{\eta_I \zeta_I}(a_I) \gamma + a_I d_{\zeta_I \zeta_I}(\gamma) \\
&= -a_I \alpha_I \varphi \\
&= -(1 + d_{\zeta \zeta}(h)) \varphi
\end{aligned}$$

or l'identité de Bianchi montre que $d_{\zeta \zeta}(\varphi) = 0$ et on a

$$\begin{aligned}
d_{\zeta \zeta}(h\varphi) &= d_{\zeta \zeta}(h)\varphi + h d_{\zeta \zeta}(\varphi) \\
&= d_{\zeta \zeta}(h)\varphi
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
d_{\zeta_I \zeta_I}(a_I \gamma) &= d_{\eta_I \zeta_I}(a_I) \gamma + a_I d_{\zeta_I \zeta_I}(\gamma) \\
&= -(1 + d_{\zeta \zeta}(h)) \varphi \\
&= -\varphi - d_{\zeta \zeta}(h)\varphi \\
&= -\varphi - d_{\zeta \zeta}(h\varphi)
\end{aligned}$$

et donc

$$\varphi = -(d_{\zeta \zeta}(a\gamma) + d_{\zeta \zeta}(h\varphi))$$

dans ce cas, on choisit $\varepsilon = a\gamma + h\varphi$.

Etape2 : On remplaçant ζ par θ , nous pouvons supposer que $d(\zeta) + \zeta^2 = 0$, par conséquent $d_{\zeta \eta}^2(\varepsilon) = 0$

On modifie ζ et α de sorte que $d_{\zeta \eta}(\alpha) = 0$ et $d_{\zeta \eta}^2 = 0$.

On note par $\omega := d_{\zeta \eta}(\alpha) = d(\alpha) + \eta\alpha - \alpha\zeta$ alors $d_{\zeta \eta}(\omega) = 0$

On pose $\theta = \zeta + \varepsilon'$ pour un ε' choisi de sorte que $d_{\zeta \zeta}(\varepsilon') = 0$, donc on a bien

$$d(\theta) + \theta^2 = d(\zeta) + \zeta^2 + d_{\zeta \zeta}(\varepsilon') = 0$$

donc

$$\begin{aligned}
d_{\theta\eta}(\alpha) &= d_{(\zeta+\varepsilon')\eta}(\alpha) \\
&= d(\alpha) + \eta\alpha + \alpha(\zeta + \varepsilon') \\
&= d(\alpha) + \eta\alpha + \alpha\zeta + \alpha\varepsilon' \\
&= (d(\alpha) + \eta\alpha + \alpha\zeta) + \alpha\varepsilon' \\
&= d_{\zeta\eta}(\alpha) + \alpha\varepsilon'
\end{aligned}$$

Prenant maintenant $t \in \mathcal{P}^1(F, E).I$, et on calcule

$$\begin{aligned}
d_{\theta\eta}(\alpha + t) &= d_{\theta\eta}(\alpha) + d_{\theta\eta}(t) \\
&= d(\alpha) + \eta\alpha + \alpha\theta + d(t) + \eta t + t\theta \\
&= d(\alpha) + \eta\alpha + \alpha(\zeta + \varepsilon') + d(t) + \eta t + t(\zeta + \varepsilon') \\
&= d(\alpha) + \eta\alpha + \alpha\zeta + \alpha\varepsilon' + d(t) + \eta t + t\zeta + t\varepsilon' \\
&= (d(\alpha) + \eta\alpha + \alpha\zeta) + \alpha\varepsilon' + (d(t) + \eta t + t\zeta) + t\varepsilon' \\
&= d_{\zeta\eta}(\alpha) + d_{\zeta\eta}(t) + \alpha\varepsilon' \quad (t\varepsilon' = 0 \bmod(I))
\end{aligned}$$

Posons maintenant $\varepsilon' = -a\omega$ donc

$$\begin{aligned}
\alpha\varepsilon' &= -\alpha a\omega \\
&= -(1 + d_{\eta\eta}(g))\omega \\
&= -\omega - d_{\eta\eta}(g)\omega \\
&= -\omega - d_{\zeta\eta}(g\omega)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
d_{\zeta\eta}(g\omega) &= d_{\eta\eta}(g)\omega + g d_{\zeta\eta}(\omega) \\
&= d_{\eta\eta}(g)\omega \quad (\text{car } d_{\zeta\eta}(\omega) = 0).
\end{aligned}$$

Posons $t = g\omega$ et remplaçons ça dans la formule de $d_{\theta\eta}(\alpha + t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
d_{\theta\eta}(\alpha + t) &= d_{\zeta\eta}(\alpha) + d_{\zeta\eta}(g\omega) + \alpha\varepsilon' \\
&= d_{\zeta\eta}(\alpha) + d_{\zeta\eta}(g\omega) - \omega - d_{\zeta\eta}(g\omega) \\
&= d_{\zeta\eta}(\alpha) - \omega \\
&= 0
\end{aligned}$$

car par hypothèse $d_{\zeta\eta}(\alpha) = \omega$.

Ces résultats montrent bien le théorème suivant :

Théorème 1 *Il existe des relevements ζ pour ζ_I et α pour α_I tels que $d(\zeta) + \zeta^2 = 0$ et $d_{\zeta\eta}(\alpha) = 0$.*

Construction de la carte $\varphi : V \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$

On choisit des k -bases $e^1, \dots, e^r \in \mathcal{P}^1(E, E)$ et $f^1, \dots, f^s \in \mathcal{P}^2(E, E)$, et on définit l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^1(E, E) \times \mathcal{P}^1(E, E) &\rightarrow \mathcal{P}^2(E, E) \\ (e^i, e^j) &\mapsto e^i e^j = \sum_{l=1}^s a_l^{ij} f^l \end{aligned} \quad (11)$$

avec

$$\mathcal{P}^1(E, E) = k^r = \left\{ \sum x_i e^i, \quad x_i \in k, e^i \in \mathcal{P}^1 \right\} \quad (12)$$

et

$$\mathcal{P}^2(E, E) = k^s = \left\{ \sum y_l f^l, \quad y_l \in k, f^l \in \mathcal{P}^2 \right\}$$

les coefficients structurels $a_l^{ij} \in k$ sont unique. La différentielle

$$\begin{aligned} d : \mathcal{P}^1(E, E) &\rightarrow \mathcal{P}^2(E, E) \\ e^i &\mapsto d(e^i) = \sum_{l=1}^s y_l^i f^l \end{aligned} \quad (13)$$

et $(z^1, \dots, z^s) \in k^s$. Pour un $\eta = \sum_{i=1}^r z_i e^i \in \mathcal{P}^1(E, E)$, on a

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \left(\sum_{i=1}^r z_i e^i \right) \left(\sum_{j=1}^r z_j e^j \right) \\ &= \sum_{i,j} z_i z_j e^i e^j \\ &= \sum_{i,j} z_i z_j \left(\sum_{l=1}^s a_l^{ij} f^l \right) \\ &= \sum_{l=1}^s \left(\sum_{i,j} z_i z_j a_l^{ij} \right) f^l. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(\eta) &= d\left(\sum_{i=1}^r z_i e^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^r z_i d(e^i) \\ &= \sum_{i=1}^r z_i \left(\sum_{l=1}^s b_l^i f^l \right) \\ &= \sum_{l=1}^s \left(\sum_{i=1}^r z_i b_l^i \right) f^l \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
d(\eta) + \eta^2 &= \sum_{i=1}^r z_i \left(\sum_{l=1}^s y_l^i f^l \right) + \sum_{i,j} z_i z_j \left(\sum_{l=1}^s a_l^{ij} f^l \right) \\
&= \sum_{l=1}^s \left(\sum_{i=1}^r z_i y_l^i \right) f^l + \sum_{l=1}^s \left(\sum_{i,j} z_i z_j a_l^{ij} \right) f^l \\
&= \sum_{l=1}^s \left(\sum_{i=1}^r z_i y_l^i + \sum_{i,j} z_i z_j a_l^{ij} \right) f^l \\
&= \sum_{l=1}^s c_l f^l \quad \text{et} \quad c_l = \sum_{i=1}^r z_i b_l^i + \sum_{i,j} z_i z_j a_l^{ij}
\end{aligned}$$

Notre question est de construire un foncteur $Alg - Com_k \rightarrow \mathcal{E}ns$ qui a pour chaque anneau (ou algèbre) B son image l'ensemble des points de B et montrer qu'il est représentable par un schéma affine qu'on notera par V_E . Pour cela on définit les schémas affines par le foncteur $Spec$ et on les note par

$$\mathcal{P}_{sch}^1(E, E) := Spec(k[x_1, \dots, x_r])$$

et

$$\mathcal{P}_{sch}^2(E, E) := Spec(k[y_1, \dots, y_s])$$

$$\mathcal{P}_{sch}^1(B) = \mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B = \mathbb{A}^r(B) = B^r$$

On peut ensuite utiliser les mêmes équations pour des $z_i \in B$ et B un algèbre commutatif et on définit l'espace B^r par

$$\begin{aligned}
B^r &= k^r \otimes_k B \\
&= \{(z_1, \dots, z_r) : z_i \in B \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^r e^i \otimes z_i, \quad z_i \in B, e^i \in \mathcal{P}^1(E, E) \right\} \\
&= \mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B
\end{aligned}$$

Comme

$$(\mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B) \otimes_k (\mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B) = (\mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k \mathcal{P}^1(E, E)) \otimes_k B$$

On peut définir un produit similaire que (11) par :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k \mathcal{P}^1(E, E)) \otimes_k B &\rightarrow \mathcal{P}^2(E, E) \otimes_k B \\
\left(\sum_{i=1}^r e^i \otimes z_i, \sum_{j=1}^r e^j \otimes z_j \right) &\mapsto \sum_{i,j=1}^r e^i e^j \otimes z_i z_j
\end{aligned}$$

d'après la formule (11) pour tout $\eta_B \in \mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B$ on peut calculer $\eta^2 \in \mathcal{P}^2(E, E) \otimes_k B$ par

$$\begin{aligned}
\eta_B^2 &= \left(\sum_{i=1}^r e^i \otimes z_i \right) \left(\sum_{j=1}^r e^j \otimes z_j \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^r e^i e^j \otimes z_i z_j \\
&= \sum_{i,j=1}^r \left(\sum_{l=1}^s a_l^{ij} f^l \right) \otimes z_i z_j \\
&= \sum_{l=1}^s \left(\sum_{i,j=1}^r a_l^{ij} \otimes z_i z_j \right) f^l
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
d(\eta_B) &= d\left(\sum_{i=1}^r e^i \otimes z_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^r d(e^i \otimes z_i) \\
&= \sum_{i=1}^r (d(e^i) \otimes z_i + e^i \otimes d(z_i)) \\
&= \sum_{i=1}^r d(e^i) \otimes z_i \quad \text{car} \quad d(z_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \\
&= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{l=1}^s b_l^i f^l \right) \otimes z_i \\
&= \sum_{l=1}^s \left(\sum_{i=1}^r b_l^i \otimes z_i \right) f^l
\end{aligned}$$

Donc

$$d(\eta_B) + \eta_B^2 = \sum_{l=1}^s \left(\sum_{i=1}^r b_l^i \otimes z_i \right) f^l + \sum_{l=1}^s \left(\sum_{i,j=1}^r a_l^{ij} \otimes z_i z_j \right) f^l$$

On note le foncteur V_E par

$$V_E(B) = \{ \sigma \in \mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B, \quad \text{tel que} \quad d(\sigma) + \sigma^2 = 0 \} \quad (14)$$

l'ensemble des éléments de Maurer-Cartan de $\mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B$ qui peut être vue comme un foncteur représentable par un schéma affine

$$V_E(B) : k\text{-Alg} \rightarrow \mathcal{E}ns$$

Proposition 1 *Le foncteur $V_E(B)$ est le préimage de l'origine de l'espace affine $\mathcal{P}_{sch}^2(E, E)$, par le morphisme courb. Par conséquent, $V_E(B)$ est représenté par le schéma affine*

$$V_E(B) = Spec \left(\frac{k[x_1, \dots, x_r]}{\mathcal{I}} \right)$$

où \mathcal{I} est l'idéal engendré par les éléments

$$\text{courb}^*(y_l) = \sum_{i=1}^r b_l^i x_i + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_l^{ij} x_i x_j.$$

Nous obtenons donc un schéma affine V_E et un morphisme $V_E \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$.

Corollaire 1 *Le morphisme $V_E \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est formellement lisse.*

Preuve : Voir Théorème 1.

Proposition 2 *Soit X, Y des schémas avec des morphismes*

$$f : X \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}, \quad g : Y \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$$

alors le produit fibré

$$X \times_{\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}} Y$$

est représenté par un n -champ d'Artin (ie : géométrie) de type fini.

Preuve : On peut supposer que X et Y sont affines. Soient B et C deux algèbres. On pose $X = Spec(B)$ et $Y = Spec(C)$ les schémas affines associés, et on peut supposer que les morphismes f et g proviennent d'éléments de $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{es}(B)$ et $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{es}(C)$ qu'on notera (F, η) et (G, ρ) .

Ce sont alors des éléments de Maurer-Cartan $\eta \in \mathcal{P}^1(F, F) \otimes_k B$ et $\rho \in \mathcal{P}^1(G, G) \otimes_k C$. Une flèche $Spec(R) \rightarrow X \times Y$ correspond à $B \otimes_k C \rightarrow R$, et on notera η_R et ρ_R les images de $\eta \otimes 1_C$ et $1_B \otimes \rho$ dans $\mathcal{P}^1(F, F) \otimes_k R$ et $\mathcal{P}^1(G, G) \otimes_k R$ respectivement. Ce sont des MC-éléments.

L'ensemble simplicial des relevements

$$\begin{array}{ccc} & & X \times_{\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}} Y \\ & \nearrow & \downarrow \\ Spec(R) & \rightarrow & X \times Y \end{array}$$

est équivalent à

$$\mathcal{M}^{(\infty, 0)}(R)((F, \eta_R), (G, \rho_R))$$

qui est égale au sous-ensemble simplicial

$$\mathcal{M}^{(\infty, 1)}(R)((F, \eta_R), (G, \rho_R))^{iso} \subset \mathcal{M}^{(\infty, 1)}(R)((F, \eta_R), (G, \rho_R))$$

des morphismes inversibles.

D'autre part

$$\mathcal{M}^{(\infty,1)}(R)((F, \eta_R), (G, \rho_R)) = DP(\tau_{\leq 0}(\mathcal{P}(F, G) \otimes_k R, d_{\eta_R, \rho_R})).$$

Posons

$$L := (P(F, G) \otimes_k B \otimes_k C, d_{\eta \otimes 1_C, 1_B \otimes \rho})$$

c'est un complexe parfait de $B \otimes_k C$ -modules.

Le foncteur

$$R \mapsto DP(\tau_{\leq 0}(\mathcal{P}(F, G) \otimes_k R, d_{\eta_R, \rho_R})) = DP(\tau_{\leq 0}(L \otimes_{B \otimes_k C} R))$$

définit un n -champs d'Artin $H(f, g)$ au dessus de $X \times Y$ d'après [SIMP1].

Le produit fibré $X \times_{\mathcal{M}} Y$ est le sous champs des morphismes inversibles $H(f, g)^{iso} \subset H(f, g)$. On pourra voir que c'est un sous-champs ouvert, ce qui montre que $X \times_{\mathcal{M}} Y$ est un n -champs d'Artin.

Lemme 2 *Soit k un corps algébriquement clos, M un $(n+1)$ -champs sur un schémas affine $k\text{-Alg-Com}$ et si V est un schéma de type fini sur k , et si on a un morphisme $\varphi : V \rightarrow M$. Si φ est formellement lisse, et si l'application $V(k) \rightarrow \mathcal{P}^0(M(k))$ est surjective, et si en plus de ça M satisfait les conditions de la proposition (2). Alors M est un $(n+1)$ -champs d'Artin de type fini.*

Corollaire 2 *le $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est un $(n+1)$ -champs d'Artin de type fini.*

Pridham montre qu'un $(n+1)$ -champs d'Artin de type fini peut être représenté par un schéma simplicial ayant des bons propriétés [PRID]. Il serait intéressant de construire un tel schéma simplicial explicitement en partant des cartes V_E .

Exemple :

Dans cet exemple, on va utiliser les mêmes arguments que dans [BENZ08], pour cela on donne une bref rappel de l' ∞ -champs $Perf$:

Un complexe strictement parfait est un complexe strictement borné des fibrés vectoriels algébriques. On peut dire qu'un complexe est parfait s'il est localement quasi-isomorphe à un complexe strictement parfait.

Le champs $Perf$ des complexes parfait est un foncteur

$$\begin{aligned} Aff_k^o &\rightarrow Ens^{\Delta^o} \\ X &\mapsto \mathcal{N}erf(CpxPerf_{qiso}(X)) \end{aligned}$$

où Aff_k^o est la catégories des schémas affines et $CpxPerf_{qiso}$ est la catégorie dont les objets sont des complexe parfait et les flèches sont les quasi-isomorphismes entre ces complexes.

On choisit un nombre fini des complexes d'espaces vectoriels de dimensions finies avec $d = 0$, on les notes par $E^\bullet := (E^\bullet, 0)$. Soit \mathcal{P}^\bullet la dg-catégorie formée par ces objets, avec

$$\mathcal{P}^\bullet(E^\bullet, F^\bullet) := (E^\bullet)^* \otimes F^\bullet, \quad d = 0.$$

Un élément de Maurer-Cartan η dans $\mathcal{P}^1(E^\bullet, E^\bullet)$ est un différentiel

$$\eta = \{\eta^i\}, \quad \eta^i : E^i \rightarrow E^{i+1} \quad \text{et} \quad \eta^{i+1}\eta^i = 0.$$

qui permet d'obtenir un nouveau complexe

$$\dots \xrightarrow{\eta^{i-1}} E^i \xrightarrow{\eta^i} E^{i+1} \xrightarrow{\eta^{i+1}} \dots$$

Le schéma V_{E^\bullet} est la variété des complexes de Buchsbaum-Eisenbud, voir [BUCH1], [BUCH2], [BRUN], [HUNE], [KEMP], [MASS], [TRIV] et [YOSH]. Le champs $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est le sous- $(n+1)$ -champs ouvert de $Perf$ couvert par les cartes V_{E^\bullet} et les morphismes

$$V_{E^\bullet} \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}} \subseteq Perf.$$

sont ceux mentionnés dans [BENZ08].

L'application du corollaire 2 dans le cas de cet exemple, nous donne une nouvelle démonstration du théorème de Toen-Vaquié dans [TOEN2] que le champs $Perf$ est recouvert de n -champs d'Artin.

Références

- [BENZ08] B. BENZEGHLI. Les Complexes Parfaits. Mémoire de recherche Master2. 16 SEPT 2008.
- [BENZ12] B. BENZEGHLI. Thèse en cours de rédaction.
- [BRUN] W. BRUNS. Divisors on varieties of complexes. Math. Ann. 264 (1983), 53-71.
- [BUCH1] D. BUCHSBAUM, D. EISENBUD. What makes a complex exact ? J. Algebra 25 (1973), 259-268.
- [BUCH2] D. BUCHSBAUM, D. EISENBUD. Some structure theorems for finite free resolutions. Adv. in Math. 12 (1974), 84-139.
- [CALA] J. CALAIS. Eléments de Théorie des Anneaux (Anneaux commutatifs). Ellipses, 2006.
- [DWYER1] W. G. DWYER and D. M. KAN. Calculating Simplicial Localizations. Journal of Pure and Applied Algebra. 18(1980) 17 – 35.
- [DWYER2] W. G. DWYER and D. M. KAN. Simplicial Localizations of Categories. Journal of Pure and Applied Algebra 17(1980) 267 – 284.
- [DWYER3] W. G. DWYER and D. M. KAN. Foncteur Complexes for diagrams of Simplicial Sets. MATHEMATICS, proceeding A 86(2), June 20, 1983.

- [DWYER4] W. G. DWYER and D. M. KAN. An obstruction Theory for Diagrams of Simplicial Sets. *MATHEMATICS, Proceedings A* 87(2), June 18, 1984.
- [GUGE] V.K.A.M. GUGENHEIM, L. LAMBE. Applications of perturbation theory to differential homological algebra I,II. *Illinois J. Math.* 33 (1989), 556-582; 35 (1991), 357-373.
- [HART] R. HARTSHORNE. Algebraic geometry. (Graduate Texts in Mathematics 52). Springer-Verlag, 6th edition 1993.
- [HIRS] A. HIRSCHOWITZ, C. SIMPSON. Déscente pour les n -champs. Preprint arXiv :math/9807049.
- [HUNE] C. HUNEKE. The Arithmetic Perfection of Buchsbaum-Eisenbud Varieties and Generic Modules of Projective Dimension Two. *Transactions of the American Mathematical Society*, 265 (1981), 211-233.
- [KEMP] G. KEMPF. Images of homogeneous vector bundles and varieties of complexes. *Bull. Amer. Math. Soc.* 81 (1975), 900-901.
- [LANG] S. LANG. ALGEBRA. third edition. Addison-Wesley Publishing Company 1993.
- [MASS] C. MASSRI. Examples of varieties of structures. Preprint arXiv :1202.5530 (2012).
- [PERR] D. PERRIN. GEOMETRIE ALGEBRIQUE (Une introduction). SAVOIRS ACTUELS (CNRS Edition / InterEdition), 1998.
- [PRID] J. P. PRIDHAM. Presenting higher stacks as simplicial schemes. Preprint arxiv 0905.4044 (2009).
- [SIMP1] C. SIMPSON. Algebraic (geometric) n -stacks. 1996. Preprint. <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9609014>.
- [SIMP2] C. SIMPSON. Geometricity of the Hodge filtration on the ∞ -stack of perfect complexes over X_{DR} . Preprint. <http://arxiv.org/abs/math/0510269v2>
- [TABU] G. TABUADA. Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 340 (2005) 15-19.
- [THOM] R. THOMASON, T. TROBAUGH. Higher algebraic K -theory of schemes and of derived categories. *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, 247–435, *Progr. Math.*, 88, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.
- [TOEN1] B. TOEN. The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory. *Invent. Math.* 167. 615-667 (2007).
- [TOEN2] B. TOEN, M. VAQUIE. Moduli of objects in dg-categories. *Annales de l'E.N.S.*, 40 (2007), 387-444.
- [TRIV] V. TRIVEDI. The seminormality property of circular complexes. *Proc. Indian Acad. Sci.* 101 (1991), 227-230.
- [YOSH] Y. YOSHINO. Some results on the variety of complexes. *Nagoya Math. J.* 93 (1984), 39-60.

LABORATOIRE J.A. DIEUDONNÉ, UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS, PARC VAL-ROSE, 06108 NICE CEDEX 02, FRANCE, bbrahim@unice.fr